Միջվարժարանային Օլիմպիադա
28.10.2019

Մաթեմատիկա - Տևողությունը 180 րոպե

7-րդ դասարան

1. **Հետևյալ կոտորակներից քանի՞սն են կրճատելի.**
   1/2019; 2/2019; 3/2019;...; 2017/2019; 2018/2019

   <u>**Լուծում:**</u> 2019 թիվը վերլուծենք պարզ արտադրիչների՝ 2019=3·673: Հետևաբար, կրճատելի կլինեն այն կոտորակները որոնց համարիչները 3 կամ 673 թվերի բազմապատիկներ են: Մինչև 2019 թիվը կա 673-ի 2 բազմաբատիկ՝ 673 և 1346 թվերը, 3-ի 672 բազմապատիկ՝ 2016:3=672:
   Պատասխան՝ 674:

2. **Գտել այն բոլոր p պարզ թվերը, որոնց դեպքում 7·p+3 թիվը նույնպես պարզ է:**

   <u>**Լուծում:**</u> Եթե p=2, ապա 7·p+3=17, որը պարզ թիվ է: Եթե p>2, ապա 7·p-ն կենտ թիվ է, ուստի 7·p+3>3 և 7·p+3-ն զույգ թիվ է: Հետևաբար, 7·p+3-ն պարզ թիվ լինել չի կարող:
   Պատասխան՝ 2:

3. **Վեց տուփերում գտնվում են տարբեր քանակի մատիտներ, համապատասխանաբար, 15, 16, 18, 19, 20 և 31 հատ: Արամը և Գագիկը վերցրեցին հինգ տուփ, իսկ 6-րդ տուփը վերցրեց Կարենը: Պարզվեց, որ Գագիկի վերցրած մատիտների քանակը երկու անգամ շատ է, քան Արամինը: Քանի՞ մատիտ կա Կարենի վերցրած տուփում:**

   <u>**Լուծում:**</u> Մատիտների ընդհանուր քանակը հավասար է 119-ի, որը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ: Նկատենք, որ Արամի և Գագիկի մատիտների քանակը 3-ի բազմապատիկ է՝ 1 մասը Արամի մոտ է, 2 մասը՝ Գագիկի: Հետևաբար, Կարենի մատիտների քանակը 3-ի բաժանելիս տալիս է 2 մնացորդ: Իսկ այդ տուփերից միայն 4-րդում է, որի մատիտների քանակը՝ 20-ը երեքի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ:
   119-20=99, 99:3=33, 2·33=66: Արամը վերցրել է 1-ին և 3-րդ տուփերը՝ 15+18=33, Գագիկը վերցրել է 2-րդ, 4-րդ և 6-րդ տուփերը՝ 16+19+31=66:
   Պատասխան՝ 20:

4. **Հարթության վրա տրված են 5 հատվածներ: Առաջին հատվածը հատում է մնացած հատվածներից 3-ին, երկրորդը՝ նույնպես 3-ին, իսկ երրորդը և չորրորդը հատում են 4-ական հատվածներ: Քանի՞ հատված է հատում հինգերորդ հատվածը:**

   <u>**Լուծում:**</u> Քանի որ 3-րդ և 4-րդ հատվածները հատվում են մնացած բոլոր հատվածների հետ, նշանակում է, որ դրանք հատվում են 1-ին և 2-րդ հատվածների հետ:
   Եթե 1-ին հատվածը հատվում է 2-րդի հետ /1-ին հատվածը հատվում է ընդամենը 3 հատվածների հետ/, ուրեմն այն չի հատվում 5-րդի հետ: Ստացվեց, որ 2-րդը նույնպես հատվում է 1-ի հետ, ուստի չի կարող հատվել 5-րդի հետ:
   Եթե 1-ին հատվածը չի հատվում 2-րդի հետ, ապա այն հատվում է 5-րդի հետ: 2-րդ հատվածը չհատվելով 1-ինի հետ՝ կհատվի 5-րդի հետ:
   Պատասխան՝ 2 / 3-րդ և 4-րդ հատվածների հետ/ կամ 4 /բոլոր հատվածների հետ/:

5. **9սմ, 12սմ, և 15սմ կողմերով երեք մետաղյա խորանարդիկներից ձուլեցին մեկ նոր խորանարդիկ: Ինչքա՞ն է նոր խորանարդիկի կողմի երկարությունը:**

   <u>**Լուծում:**</u> Նկատենք, որ 9·9·9+12·12·12+15·15·15=18·18·18:
   Պատասխան՝ 18սմ:

8-րդ դասարան

1. **Ապացուցել, որ (123456789^2+1)/2 թիվը կարելի է ներկայացնել երկու բնական թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով:**

   <u>Լուծում:</u> Օգտվենք $((2k+1)^2+1)/2=k^2+(k+1)^2$ նույնությունից: Մեր խնդրում $2k+1=123456789$: Ուստի $k=61728394$: Հետևաբար, $(123456789^2+1)/2=61728394^2+61728395^2$:

2. **Զրոյով չվերջացող բնական թվի քառակուսին ամենաշատը քանի՞ միատեսակ թվանշանով կարող է վերջանալ:**

   <u>Լուծում:</u> Ակնհայտ է, որ բնական թվի քառակուսին չի կարող վերջանալ 2,3,7 և 8 թվանշաններից որևէ մեկով: Մնում է դիտարկել 1,4,5 և 9 թվանշանները: Հայտնի է, որ բնական թվի քառակուսին 4-ի բաժանելիս կարող է տալ 0 կամ 1 մնացորդ: Եթե թվի քառակուսին վերջանա 11-ով, 55-ով կամ 99-ով, ապա այն 4-ի բաժանելիս կստացվի 3 մնացորդ: Հետևաբար, թվի քառակուսին չի կարող վերջանալ 2 հատ 1-ով, 2 հատ 5-ով կամ 2 հատ 9-ով: Մնում է դիտարկել 4 թվանշանը: Նկատենք, որ $12^2=144$, $38^2=1444$: Ապացուցենք, որ 4 թվանշանը չի կարող երեքից շատ լինել: Ենթադրենք հակառակը՝ $n^2=10000m+4444$, $m\in N$: Ակնհայտ է, որ n-ը զույգ թիվ է: Դիցուք $n=2k$: Հետևաբար, $k^2=2500m+1111$: Այս հավասարության աջ մասը 4-ի բաժանելիս ստացվում է 3 մնացորդ, հետևաբար, այն չի կարող լինել լրիվ քառակուսի:

   Պատասխան՝ 3:

3. **ԱԲԱԲ լեզվում բառ անվանում են ցանկացած «Ա» և «Բ» տառերի հավաքածուն: 9 տառից բաղկացած քանի՞ բառ գոյություն ունի այնպես, որ «Ա» տառերը կողք կողքի չլինեն:**

   <u>Լուծում:</u> Մեկ տառ ունեցող ընդամերը երկու բառ կա՝ Ա և Բ: Խնդրի պայմանին բավարարող երկու տառ պարունակող բառերն առաջանում են մեկ տառ պարունակող բառերից՝ Բ-ն աջից կցագրելով ունեցած երկու բառերին, կամ Ա-ն աջից կցագրելով Բ բառը Ա-ով ավարտվող/: Երեք տառ պարունակող բառերն առաջանում են երկու տառ պարունակող բառերից՝ բոլորին Բ կցագրելով /3 բառ/ և Բ-ով ավարտվողներին Ա կցագրելով /2 բառ/, ընդամենը՝ 3+2=5: Հաջորդը կլինի բոլորին՝ 5-ին Բ կցագրելով և Բ-ով ավարտվող 3 բառերին Ա կցագրելով: Այսինքն՝ 5+3=8: Հինգ տառ պարունակող բառերն առաջանում են չորս տառ պարունակող բառերից՝ բոլորին Բ կցագրելով /8 բառ/ և Բ-ով ավարտվողներին 5 բառերին Ա կցագրելով, ընդամենը՝ 8+5=13: Եվ այդպես շարունակ: Վեց տառ պարունակող բառերի քանակը կլինի 13+8=21, յոթ տառ պարունակող բառերի քանակը՝ 21+13=34, ութ տառ պարունակող բառերի քանակը՝ 34+21=56, ինը տառ պարունակող բառերի քանակը՝ 56+34=89:

4. **L կետը ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: Գտնել եռանկյան B և C անկյունները, եթե AL+AC=BC և $\angle BAC=70^0$:**

   <u>Լուծում:</u> BC կողմի վրա նշենք M կետն այնպես, որ BM=AL, MC=AC: Այդ դեպքում $\Delta ALC=\Delta MLC$: Ուստի, LM=AL և $\angle LMC=\angle LAC=35^0$, որտեղից $\angle MLB=\angle MBL=\angle LMC/2=17{,}5^0$: Հետևաբար, $\angle ABC=35^0$, իսկ $\angle ACB=180^0-70^0-35^0=75^0$:

   Պատասխան՝ $\angle ABC=35^0$, $\angle ACB=75^0$:

9-րդ դասարան

1. Գտնել m և n բնական թվերի այն բոլոր արժեքները, որոնց համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$(2^m+1, 2^n+1) = 2^{(m,n)}+1 \qquad (1)$$

<u>**Լուծում**</u>: Դիցուք $(m,n)=d$, $m=xd$, $n=yd$, որտեղ x-ը և y-ը փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են: Այդ դեպքում (1) պայմանից բխում է, որ $2^{xd}+1$ և $2^{yd}+1$ թվերը բաժանվում են 2^d+1-ի: Այսինքն՝ $2^{xd}\equiv -1(mod\ 2^d+1)$: Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $2^d\equiv -1(mod\ 2^d+1)$, կստանանք՝

$$(-1)^x \equiv (2^d)^x \equiv 2^{xd} \equiv -1(mod\ 2^d+1):$$

Հետևաբար x-ը կենտ թիվ է: Հանգունորեն կստանանք, որ y-ը նույնպես կենտ թիվ է: Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք, որ (1) հավասարության դեպքում $x=\frac{m}{(m,n)}$ և $y=\frac{n}{(m,n)}$ թվերը կենտ են:

Այժմ ապացուցենք, որ եթե x և y թվերը կենտ են, ապա տեղի ունի (1) հավասարությունը: Քանի որ x և y թվերը կենտ են, ապա ակնհայտ է, որ $2^{xd}+1$ և $2^{yd}+1$ թվերը բաժանվում են 2^d+1-ի: Մնում է, ցույց տալ, որ եթե p-ն $2^{xd}+1$ և $2^{yd}+1$ թվերի կամայական ընդհանուր պարզ բաժանարար է, ապա 2^d+1-ը բաժանվում է p-ի: Եթե $x=1$ կամ $y=1$, ապա պնդումն ակնհայտ է: Այսպիսով առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $x>y>1$: Քանի որ $2^{xd}+1 \vdots p$ և $2^{yd}+1 \vdots p$, ապա $2^{xd}-2^{yd} \vdots p$: Այստեղից՝ $2^{(x-y)d}-1 \vdots p$: Հետևաբար՝ $2^{(x-y)d}+2^{yd} \vdots p$, որտեղից՝ $2^{|x-2y|d}+1 \vdots p$: Նշենք, որ $y_1=|x-2y|$ -ը կենտ բնական թիվ է (այն 0 չէ քանի որ $x>y>1$ և $(x,y)=1$): Այսպիսով ստացանք y և y_1 կենտ բնական թվեր, որոնց համար $2^{yd}+1 \vdots p$ և $2^{y_1 d}+1 \vdots p$, ընդ որում $y_1<x$ և $(y,y_1)=1$: Այս գործողությունը շարունակելով կստանանք կենտ թվերի թվազույգերի հաջորդականություն՝ $(x,y),(y,y_1),(y_1,y_2),\ldots..$ այնպես, որ

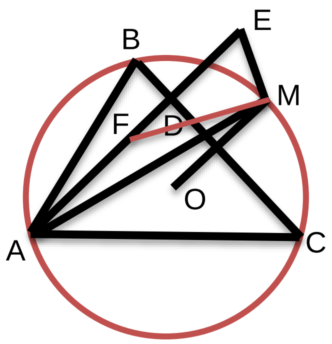
$$x+y>y+y_1>y_1+y_2>\cdots \text{ և } 2^{xd}+1 \vdots p, 2^{yd}+1 \vdots p, 2^{y_1 d}+1 \vdots p, 2^{y_2 d}+1 \vdots p\ldots:$$

Այս գործողությունները անվերջ շարունակվել չեն կարող քանի որ բնական թվերի նվազող հաջորդականությունը անվերջ լինել չի կարող: Հետևաբար ինչ-որ քայլում կստանանք $y_n=1$, ուստի՝ $2^d+1 \vdots p$:

Պատ.՝ Բոլոր այն m,n բնական թվերի թվազույգերը, որոնց համար $\frac{m}{(m,n)}$ և $\frac{n}{(m,n)}$ թվերը կենտ են:

2. ABC սուրանկյուն եռանկյան AD բարձրության շարունակության վրա վերցված է E կետ, ընդ որում AE հատվածի երկարությունը հավասար է ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի տրամագծի երկարությանը: M կետը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի A կետը չպարունակող BC աղեղի միջնակետն է: Ապացուցել, որ $\angle AME = 90°$:

Լուծում: Դիցուք O-ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այդ դեպքում $OM \perp BC$, $AE \perp BC$, ուստի՝ $AE \parallel OM$: Հետևաբար $AOME$ – ն սեղան է, որի մի սրունքը՝ $AO = R$, իսկ հիմքերն են՝ $OM = R, AE = 2R$: M կետից տանենք MF ուղիղը, որը զուգահեռ է AO-ին: Այդ դեպքում $AOMF$-ը կլինի շեղանկյուն: Հետևաբար՝ $AF = MF = AO = OM = R$: Ունենք, որ $EF = AE - AF = 2R - R = R$: Հետևաբար AME եռանկյան մեջ MF-ը միջնագիծ է և հավասար է AE կողմի կեսին, ուստի $\angle AME = 90°$:



3. Տրված է n $(n > 1)$ բնական թիվը: Գտնել այն բոլոր $P(x)$ բազմանդամները, որոնց համար տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$P(x) \cdot P(x^2) \cdot P(x^3) \cdot \ldots \cdot P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \quad (2)$$

Լուծում: Դիտարկենք դեպքեր:

1) Եթե $P(x) = const$, ապա $P(x) \equiv -1$ (եթե n-ը կենտ է) կամ $P(x) \equiv 0$ կամ $P(x) \equiv 1$:

2) Եթե $P(x) \neq const$ և $P(0) \neq 0$: Այդ դեպքում $P(x)$ բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը՝ $P(x) = x^k Q(x) + a$, որտեղ $a = P(0)$ և $Q(0) \neq 0$: Այսպիսով, օգտվելով տրված նույնությունից, ստանում ենք՝

$$(x^k Q(x) + a)(x^{2k} Q(x^2) + a)(x^{3k} Q(x^3) + a) \ldots (x^{nk} Q(x^n) + a) =$$
$$= x^{k\frac{n(n+1)}{2}} Q\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) + a$$

Հետևաբար՝

$$(x^k Q(x) + a) \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a(mod\, x^{2k}) \quad \Rightarrow$$

$$a^{n-1} x^k Q(x) + a^n \equiv a(mod\, x^{2k})$$

Տեղադրելով $x = 0$ (2) նույնության մեջ, կստանանք՝ $a^n = a$, ուստի՝

$$x^k Q(x) \equiv 0(mod\, x^{2k}):$$

Հետևաբար՝ $Q(x) \vdots x^k$, այսինքն՝ $Q(0) = 0$, որը հնարավոր չէ:

3) Եթե $P(x) \neq const$ և $P(0) = 0$: Այդ դեպքում $P(x) = x^k P_1(x)$ (k $\in N$), որտեղ $P_1(0) \neq 0$: $P(x)$ բազմանդամի նշված տեսքը տեղադրելով տրված նույնության մեջ կստանանք համանման նույնություն $P_1(x)$ բազմանդամի համար: Այսպիսով, խնդիրը բերվում է նախորդ երկու դեպքերին: Քանի որ 2-րդ դեպքում (2) նույնությանը բավարարող բազմանդամ չկա, ապա ստանում ենք, որ $P_1(x)$ բազմանդամը հաստատուն է: Հետևաբար, օգտվելով առաջին դեպքից, ստանում ենք, որ $P(x) \equiv -x^k$ (եթե n-ը կենտ է) կամ $P(x) \equiv x^k$:

Դժվար չէ տեսնել, որ ստացված բազմանդամները բավարարում են (2) նույնությանը:

Պատ.՝ $P(x) \equiv -x^k$ $(k \in Z,\ k \geq 0)$, եթե n-ը կենտ է $(n > 1)$;

$P(x) \equiv x^k (k \in Z,\ k \geq 0)$ կամ $P(x) \equiv 0$,

եթե n-ը 1-ից մեծ կամայական բնական թիվ է:

10-րդ դասարան

1. **Դիցուք $\boldsymbol{\alpha, \beta}$-ն $\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$ հավասարման արմատներն են: Գտնել $\boldsymbol{\frac{\alpha^5}{\alpha+1} + \frac{\beta^5}{\beta+1}}$ արտահայտության արժեքը:**

<u>Լուծում:</u> Քանի, որ α–ն $x^2 - x - 1 = 0$ հավասարման արմատն է, ապա$\alpha^2 = \alpha + 1$: Այդ դեպքում $\alpha^5 = \alpha^4 + \alpha^3 = 2\alpha^3 + \alpha^2 = 2(\alpha^2 + \alpha) + \alpha^2 = 3\alpha^2 + 2\alpha = 3(\alpha + 1) + 2\alpha = 5\alpha + 3$: Քանի, որ $\alpha + \beta = 1$ և $\alpha\beta = -1$, ապա $\frac{\alpha^5}{\alpha+1} + \frac{\beta^5}{\beta+1} = \frac{5\alpha+3}{\alpha+1} + \frac{5\beta+3}{\beta+1} = 10 - 2\left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}\right) = \quad = 10 - \frac{2(\alpha+\beta+2)}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = 4$:

2. **Դիցուք $\boldsymbol{a_1, a_2, \cdots, a_n}$–ը զույգ առ զույգ տարբեր բնական թվեր են: Հայտնի է, որ նրանցից կամայական երեքի գումարը պարզ թիվ է: Գտնել $\boldsymbol{n}$–ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:**

<u>Լուծում:</u> Ապացուցենք, որ $n < 5$: Ենթադրենք $n \geq 5$:Եթե a, b, c թվերը 3 –ի վրա բաժանելուց մնացորդում ստացվում է նույն թիվը, ապա $a + b + c > 6$ և $a + b + c$-ն բաժանվում է 3–ի, հետևաբար, այն պարզ թիվ չէ, ուստի այդ թվերի մեջ կա երեք թիվ, որոնք 3–ի վրա բաժանելուց ստացվում են տարբեր մնացորդներ, ուստի նրանց գումարը մեծ է 6–ից և բաժանվում է 3–ի: Երբ $n = 4$, ապա 3,5,11,15 թվերը բավարարում են խնդրի պայմանին:

3. **$\boldsymbol{ABCD}$ քառանկյան $\boldsymbol{AB, BC, CD}$ կողմերը շոշափող շրջանագծի կենտրոնը գտնում է $\boldsymbol{AD}$ կողմի վրա: Հայտնի է, որ $\boldsymbol{ABCD}$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Ապացուցել, որ $\boldsymbol{AB + CD = AD}$:**

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք I–ն $ABCD$ քառանկյան AB, BC, CD կողմերը շոշափող շրջանագծի կենտրոնն է և $\angle ABI = \angle CBI = \alpha$, $\angle BCI = \angle DCI=\beta$: Ենթադրենք, որ $\alpha > \beta$:

Քանի, որ $\angle BAD = 180° - 2\beta \Rightarrow \angle AIB = 2\beta - \alpha < \alpha \Rightarrow AB < AI$: AI հատվածի վրա վերցնենք E կետ այնպես, որ $AB = AE$: Այդ դեպքում $\angle ABE = \angle AEB = \angle BCE = \beta$, որտեղից հետևում է, որ $BCIE$ քառանկյանը կարելի արտագծել շրջանագիծ: Հետևաբար, $\angle IBC = \angle CED = \alpha$, իսկ $\angle CDE = 180° - 2\alpha$, որտեղից $\angle ECD = \angle DEC = \alpha \Rightarrow DE = DC \Rightarrow AD = AB + CD$: (Երբ $\alpha = \beta$, խնդրի լուծումն ակնհայտ է):

11-12-րդ դասարաններ

1. **Դիցուք $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$–ն $\boldsymbol{x^3 - x - 1 = 0}$ հավասարման արմատներն են: Գտնել $\boldsymbol{\frac{\alpha^7}{\alpha+1} + \frac{\beta^7}{\beta+1} + \frac{\gamma^7}{\gamma+1}}$ արտահայտության արժեքը:**

<u>Լուծում:</u> Քանի, որ α –ն $x^3 - x - 1 = 0$ հավասարման արմատն է, ապա $\alpha^3 = \alpha + 1$: Այդ դեպքում $\alpha^7 = \alpha^5 + \alpha^4 = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1)^2$: Քանի, որ $\alpha + \beta + \gamma = 0$ և

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$, ապա $\frac{\alpha^7}{\alpha+1} + \frac{\beta^7}{\beta+1} + \frac{\gamma^7}{\gamma+1} = \alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1) = \quad = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \alpha + \beta + \gamma = 2$:

2. Դիցուք $a_1, a_2, \cdots, a_n$–ը զույգ առ զույգ տարբեր ամբողջ թվեր են: Հայտնի է, որ նրանցից կամայական երեքի գումարը պարզ թիվ է: Գտնել n–ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում: Ենթադրենք, որ $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$: Պարզ է, որ այդ թվերից ամենաշատը երկուսն են բացասական: Դիտարկենք $a_2, a_3, \cdots, a_n$ թվերը: Այդ թվերից կամայական երեքի գումարը մեծ է 3–ից, քանի որ այդ գումարներից յուրաքանչյուրը մեծ է $a_1 + a_2 + a_3$ և $a_1 + a_2 + a_4$ թվերից, իսկ հինգ ամբողջ թվերի մեջ կան երեքը, որոնց գումարը բաժանվում է 3–ի (տես X-2), հետևաբար $n \le 5$: Երբ $n = 5$, ապա $-11, -5, 19, 23, 29$ թվերը բավարարում են խնդրի պայմանին:

3. $ABCDEF$ ուռուցիկ վեցանկյան AD անկյունագիծը հատում է FC և BE անկյունագծերը համապատասխանաբար M և K կետերում, իսկ FC անկյունագիծը հատում է BE անկյունագիծը N կետում այնպես, որ $AM = MN = BN, CN = NK = KD, KE = MK = FM$: Դիցուք FK և ME, BM և AN, ND և CK հատվածները հատվում են համապատասխանաբար N_0, K_0 և M_0 կետերում: Ապացուցել, որ

ա) AMF, DKE, BCN եռանկյունների M, N, K գագաթներից տարված բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են մեկ կետում:

բ) N_0, M_0 և K_0 կետերից համապատասխանաբար MK, NK և MN ուղիղներին տարված ուղղահայացները հատվում են մեկ կետում:

Լուծում 1: բ) Դիցուք FMK և MKE անկյունների կիսորդները հատվում են N_1կետում: Քանի, որ $FM = MK = KE \Rightarrow MN_1 \perp FK, KN_1 \perp ME \Rightarrow N_1N_0 \perp MK$, N_1-ը MNK եռանկյան առներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Նմանապես K_1–ը և M_1-ը MNK եռանկյան MN և KN կողմերը շոշափող առներգծած շրջանագծերի կենտրոններն են: Դիցուք N_2, M_2, K_2 կետերը MNK եռանկյան MK, NK, MN կողմերը շոշափող առներգծած շրջանագծերի շոշափման կետերն են: Ենթադրենք N_1N_2–ը և K_1K_2-ը հատվում են O կետում:

Այդ դեպքում $OM^2 - MN_2{}^2 = OK^2 - KN_2{}^2$ և $OM^2 - MK_2{}^2 = ON^2 - NK_2{}^2 \Rightarrow$

$OK^2 - MK_2{}^2 = ON^2 - MN_2{}^2 \Rightarrow OK^2 - KM_2{}^2 = ON^2 - NM_2{}^2 \Rightarrow O$ կետից NK–ին տարված ուղղահայացի հիմքը M_2 կետն է: Վերջինս Կառնոյի թեորեմի մասնավոր դեպքն է:

Թեորեմ:(Կառնո): Ապացուցել, որ ABC եռանկյան կողմերը պարունակող ուղիղներին պատկանող A_1, B_1, C_1 կետերից համապատասխանաբար BC, AC, AB կողմերին տարված ուղղահայացները հատվում են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$: (Թեորեմը ճիշտ է հարթության կամայական A_1, B_1, C_1 կետերի համար):

Լուծում 2: բ) Դիցուք I-ն MNK եռանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Քանի, որ $\angle IMK = \angle MKN_0$ և $\angle IKM = \angle KMN_0$, IMN_0K-ն զուգահեռագիծ է, հետևաբար MK հատվածին տարված IP և N_0N_2 ուղղահայացների հիմքերը համաչափ են MK հատվածի միջնակետի նկատմամբ, ուստի N_2–ը MK կողմը շոշափող առներգծած շրջանագծի շոշափման կետն է: Մնացածը առաջին լուծման նման:

ա) Քանի, որ $AM = MN, MF = MK$ և $\angle AMF = \angle NMK$, հետևաբար $\Delta\ AMF = \Delta\ NMK \Rightarrow \angle MKN == \angle AFM = \alpha$: Դիցուք MP–ն AMF եռանկյան բարձրությունն է, հետևաբար $\angle PMF = \angle NMK = \ = 90° - \alpha$: Դիցուք G–ն MNK եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այդ դեպքում $\angle MGN = 2\alpha \Rightarrow \angle NMG = 90° - \alpha \Rightarrow G$–ն պատկանում է PM ուղղին: Նմանապես BNC և DKE եռանկյունների N և K գագաթներից տարված բարձրությունները պարունակող ուղիղները անցնում են G–ով: